XVI. Calcul différentiel

1 Fonctions de deux variables à valeurs réelles

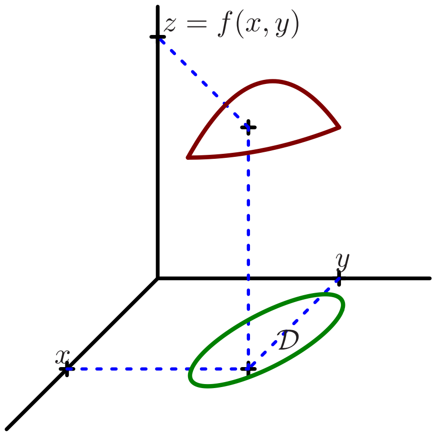
Définition 1. *On appelle* **fonction de deux variables** *x et y à valeurs réelles une fonction f d'une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$:*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$$

Exemple 1. *La fonction polynomiale $f:(x,y)\mapsto x^2+xy+y^2$ est une fonction de deux variables.*

Exercice 1. *Déterminer puis représenter graphiquement l'ensemble de définition de la fonction de deux variables $f:(x,y)\mapsto\sqrt{1-(x^2+y^2)}$. (on pourra utiliser les coordonnées polaires)*

Remarque 1. *On peut représenter graphiquement une fonction de deux variables par une surface de l'espace d'équation $z=f(x,y)$.*



Exercice 2. *Déterminer la représentation graphique de la fonction de deux variables $f:(x,y)\mapsto\sqrt{1-(x^2+y^2)}$.*

2 Continuité d'une fonction de deux variables

Définition 2. *On considère une fonction de deux variables $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ définie au voisinage de $A\in\mathbb{R}^2$, on dit que f tend vers 0 en A si pour tout $\epsilon>0$ il existe $\delta>0$ tel que $|f(M)|\leqslant\epsilon$ si $M\in\mathcal{D}$ et $AM\leqslant\delta$.*

Exercice 3. *Montrer que la fonction de deux variables $f:(x,y)\mapsto e^{x^2+y^2}-1$ tend vers 0 en $O(0;0)$.*

Définition 3. *Une fonction de deux variables $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ est dite continue en $A\in\mathcal{D}$ si la fonction $f-f(A)$ tend vers 0 en A.*

Exemple 2. *Les fonctions polynomiales de deux variables sont définies et continues sur $\mathbb{R}^2$.*

3 Dérivées partielles premières d'une fonction de deux variables

Définition 4. *On considère une fonction de deux variables* $f: \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$ *et* $A \in \mathcal{D}$.

- *Si la fonction* $x \mapsto f(x, y_A)$ *est dérivable en* x_A, *son nombre dérivé en* x_A *est appelé* **dérivée partielle** *par rapport à la variable* x *de la fonction* f *en* A *et noté* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A)$.
- *Si la fonction* $y \mapsto f(x_A, y)$ *est dérivable en* y_A, *son nombre dérivé en* y_A *est appelé* **dérivée partielle** *par rapport à la variable* y *de la fonction* f *en* A *et noté* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(A)$.

Exercice 4. *Montrer que la fonction de deux variables* $f: (x,y) \mapsto e^{x^2+y^2}$ *admet des dérivées partielles par rapport à* x *et* y *en tout point de* $\mathbb{R}^2$ *et les déterminer.*

Définition 5. *Si une fonction de deux variables* $f: \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$ *admet des dérivées partielles par rapport à* x *et* y *en* $A \in \mathcal{D}$, *on appelle* **gradient** *de la fonction* f *en* A *le vecteur :*

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(A) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(A) \end{pmatrix}$$

Contre-exemple 1. *On considère la fonction* $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$.

1. *Montrer que la fonction* f *admet des dérivées partielles par rapport à* x *et* y *en* $O(0,0)$ *et les déterminer.*
2. *Montrer que* f *n'est pas continue en* $O(0,0)$. *(on pourra calculer* $\lim\limits_{n \to +\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} f\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$*)*

Définition 6. *Si une fonction de deux variables* $f: \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$ *admet des dérivées partielles par rapport à* x *et* y *en tout point de* $\mathcal{D}$ *et que celles-ci sont continues sur* $\mathcal{D}$ *alors la fonction* f *est dite de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathcal{D}$.

Exercice 5. *Montrer que la fonction de deux variables* $f: (x,y) \mapsto \arctan(xy)$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^2$.

Propriété 1. *Une fonction de deux variables de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ *est continue sur* $\mathcal{D}$.

Démonstration. Hors-programme - On généralise la notion de développement limité d'ordre 1 pour les fonctions de deux variables. □

Théorème 1. **Dérivée d'une fonction composée**

On considère une fonction f de deux variables x et y de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ et deux fonctions a, b de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I telles que $(a(t), b(t)) \in \mathcal{D}$ pour tous $t \in I$, alors la fonction $g : t \mapsto f(a(t), b(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et :

$$g'(t) = a'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(a(t), b(t)) + b'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(a(t), b(t))$$

Démonstration. Hors-programme. □

Exercice 6. *Vérifier le théorème 1 avec les fonctions $f : (x, y) \mapsto \arctan(xy)$, $a : t \mapsto t^2$ et $b : t \mapsto e^t$.*

Corollaire 1. **Dérivées partielles d'une fonction composée**

On considère une fonction f de deux variables u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur Δ et deux fonctions a, b de deux variables x et y de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ telles que $(a(x, y), b(x, y)) \in \Delta$ pour tous $(x, y) \in \mathcal{D}$, alors la fonction $g : (x, y) \mapsto f(a(x, y), b(x, y))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ et ses dérivées partielles par rapport à x et y sont respectivement :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial a}{\partial x}(x, y)\frac{\partial f}{\partial u}(a(x, y), b(x, y)) + \frac{\partial b}{\partial x}(x, y)\frac{\partial f}{\partial v}(a(x, y), b(x, y))$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial a}{\partial y}(x, y)\frac{\partial f}{\partial u}(a(x, y), b(x, y)) + \frac{\partial b}{\partial y}(x, y)\frac{\partial f}{\partial v}(a(x, y), b(x, y))$$

Démonstration. Exigible. □

Exercice 7. *On considère une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, exprimer les dérivées partielles de la fonction $g : (x, y) \mapsto f(x^2y, xy^2)$ en fonction des dérivées partielles de la fonction f.*

Propriété 2. *On considère une fonction de deux variables $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) \end{array}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$, si f admet un extremum local en $A \in \mathcal{D}$ alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(A) = 0$.*

Démonstration. Exigible - On considère les fonctions $x \mapsto f(x, y_A)$ et $y \mapsto f(x_A, y)$. □

Exercice 8. *Déterminer les extrema de la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$.*

4 Dérivées partielles secondes d'une fonction de deux variables

Définition 7. *On considère une fonction* $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$ *admettant des dérivées partielles par rapport à* x *et* y *en tout point de* $\mathcal{D}$*, si les fonctions* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *admettent des dérivées partielles par rapport à* x *et* y *on définit les dérivées partielles secondes de la fonction* f *par :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Contre-exemple 2. *On considère la fonction* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$.

1. *Montrer que la fonction* f *admet des dérivées partielles par rapport à* x *et* y *en tout point de* $\mathbb{R}^2$ *et les déterminer.*
2. *Montrer que* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *admet une dérivée partielle par rapport à* y *en* $O(0,0)$.
3. *Montrer que* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *admet une dérivée partielle par rapport à* x *en* $O(0,0)$.
4. *Montrer que* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(O) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(O)$.

Définition 8. *Si une fonction de deux variables* $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$ *admet des dérivées partielles secondes* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *et* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ *en tout point de* $\mathcal{D}$ *et que celles-ci sont continues sur* $\mathcal{D}$ *alors la fonction* f *est dite de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathcal{D}$.

Exercice 9. *Montrer que la fonction de deux variables* $f : (x,y) \mapsto \arctan(xy)$ *est de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}^2$.

Théorème 2. **Théorème de Schwarz**

Si une fonction de deux variables $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$ *est de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathcal{D}$ *alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

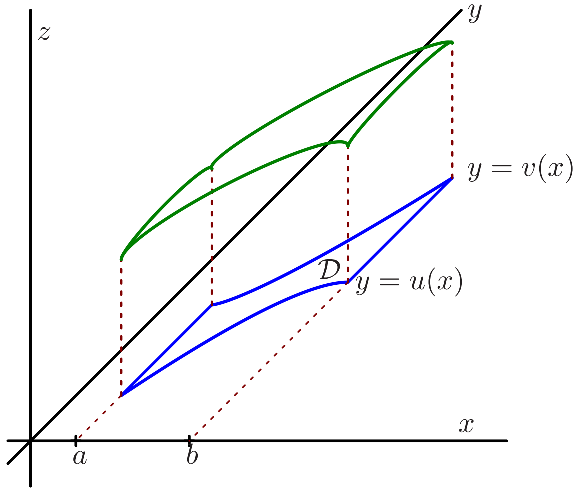
Démonstration. Hors-programme - On utilise astucieusement le théorème des accroissements finis. □

Contre-exemple 3. *On considère la fonction* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$.

1. *Montrer que* f *admet une dérivée partielle seconde* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *en tout point de* $\mathbb{R}^2$.
2. *Montrer que* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *n'est pas continue en* $O(0,0)$. *(on pourra calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(0, \dfrac{1}{n}\right)$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\dfrac{1}{n}, 0\right)$*)*

5 Intégrales doubles

Définition 9. *On considère une fonction f de deux variables x et y définie et continue sur* $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \begin{array}{c} a \leqslant x \leqslant b \\ u(x) \leqslant y \leqslant v(x) \end{array}\right\}$ *avec $a \leqslant b$, $u, v \in \mathcal{C}([a,b])$ et $u \leqslant v$, on définit l'***intégrale** *de la fonction f sur $\mathcal{D}$ par* $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$



Remarque 2. *l'intégrale double* $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ *représente le volume algébrique délimité par le plan xOy, le domaine $\mathcal{D}$ et la surface associée à la fonction f.*

Exercice 10. *On considère le domaine du plan* $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \begin{array}{c} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x^2 \leqslant y \leqslant 1 \end{array}\right\}$, *représenter graphiquement $\mathcal{D}$ puis calculer* $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Propriété 3. Positivité de l'intégrale double
On considère une fonction f de deux variables x et y définie et continue sur un domaine $\mathcal{D}$, si $f \geqslant 0$ alors $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant 0.$

Démonstration. Exigible. □

Propriété 4. Linéarité de l'intégrale double
On considère $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et deux fonctions f, g de deux variables x et y définies et continues sur un domaine $\mathcal{D}$ alors $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} (\lambda f + \mu g)(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lambda \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mu \iint_{\mathcal{D}} g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

Démonstration. Exigible. □

Propriété 5. Additivité de l'intégrale double par rapport au domaine d'intégration
On considère une fonction f de deux variables x et y définie et continue sur un domaine $\mathcal{D}$ réunion disjointe des domaines $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_1$ alors $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathcal{D}_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{\mathcal{D}_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

Démonstration. Hors-programme. □

Remarque 3. *La propriété 5 est l'équivalent de la* relation de Chasles *pour les intégrales simples.*

Exercice 11. *Calculer l'aire* $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ *du disque trigonométrique* $\mathcal{D} = \{(x,y) \ / \ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.